



Εισαγωγή στη Φυσική των Επιταχυντών II

Γ. Παπαφιλίππου

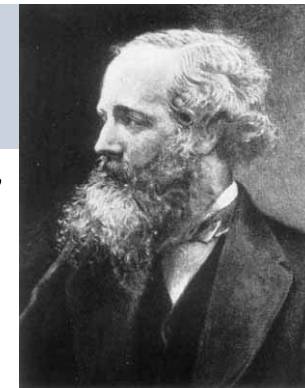
Τμήμα Επιταχυντών - CERN

Επιμορφωτικό πρόγραμμα Ελλήνων καθηγητών
CERN, Ιούλιος 2008



Βασικές αρχές δυναμικής των επιταχυντών

Εξισώσεις Maxwell



- Φυσική των επιταχυντών: περιγραφή δυναμικής φορτισμένων σωματιδίων παρουσία ηλεκτομαγνητικών πεδίων
- Εξισώσεις Maxwell σχετίζουν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που παράγονται από φορτία και κατανομές ρεύματος

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



Νόμος Gauss: απόκλιση ηλεκτρικού πεδίου δίνει την πυκνότητα πηγών φορτίου

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Νόμος Gauss για μαγνητισμό: δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

Νόμος επαγωγής του Faraday: μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο



$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

Νόμος Ampere-Maxwell: ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου σε κλειστή καμπύλη είναι ανάλογο του ρεύματος που τρέχει στην καμπύλη (στατικό ηλεκτρικό πεδίο)



$\mathbf{E}$ = ηλεκτρικά πεδία [V/m]

$\mathbf{B}$ = μαγνητική επαγωγή [T]

ρ = πυκνότητα φορτίου [C/m³]

$\mathbf{j}$ = πυκνότητα ρεύματος [A/m²]

μ_0 (μαγνητική διαπερατότητα) = $4\pi \cdot 10^{-7}$ [C V⁻¹ m⁻¹]

ϵ_0 (ηλεκτρική διαπερατότητα) = $8.854 \cdot 10^{-12}$ [V s A⁻¹ m⁻¹]

c (ταχύτητα φωτός) = $2.99792458 \cdot 10^8$ m/s

$1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$

Δύναμη Lorentz

- Δύναμη πάνω σε φορτισμένα σωματίδια που κινούνται υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Στους επιταχυντές: ηλεκτρικά πεδία χρησιμοποιούνται για επιτάχυνση σωματιδίων και μαγνητικά πεδία για καθοδήγησή
 - Ολοκλήρωση της δύναμης ως προς το μήκος της τροχιάς για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας (ή υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής της ενέργειας)

$$\Delta T = \int \mathbf{F} ds = q \int \mathbf{E} ds + \cancel{q \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt} \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

- Κινητική ενέργεια αλλάζει από **ηλεκτρικά** αλλά **όχι** από **μαγνητικά πεδία**
- Εξίσωση Lorentz για την οριζόντια συνιστώσα της δύναμης ενός σωματιδίου που κινείται στην επιμήκη διεύθυνση $\mathbf{z}$

$$\frac{dp_x}{dt} = \mathbf{F}_x = q(E_x - v_z B_y)$$

- Για σχετικιστικά σωματίδια $v_z \approx c$ και $v_z B_y \gg E_x$
- Άρα τα μαγνητικά πεδία είναι πολύ πιο αποτελεσματικά στο να καθοδηγούν τα σωματίδια

- Ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, κάθετο στην κίνηση του σωματιδίου. Τα σωματίδια εκτελούν κυκλική κίνηση όπου η ακτίνα καμπυλότητας είναι

$$\frac{1}{\rho} = |k| = \left| \frac{q}{p} B \right| = \left| \frac{q}{\beta E_{tot}} B \right|$$

- Η κυκλοτρονική συχνότητα (Larmor) $\omega_L = \left| \frac{qc^2}{E_{tot}} B \right|$
- Ορίζουμε ως **μαγνητική ακαμψία** $|B\rho| = \frac{p}{q}$
- In more practical units $\beta E_{tot}[GeV] = 0.2998 |B\rho|[Tm]$
- Για ιόντα με πολλαπλότητα φορτίου Z και ατομικό αριθμό A , η ενέργεια ανά νουκλεόνιο είναι

$$\beta \bar{E}_{tot}[GeV/u] = 0.2998 \frac{Z}{A} |B\rho|[Tm]$$

Δίπολα



- Θεωρούμε κυκλικό επιταχυντή σωματιδίων ενέργειας E με N δίπολα μήκους L

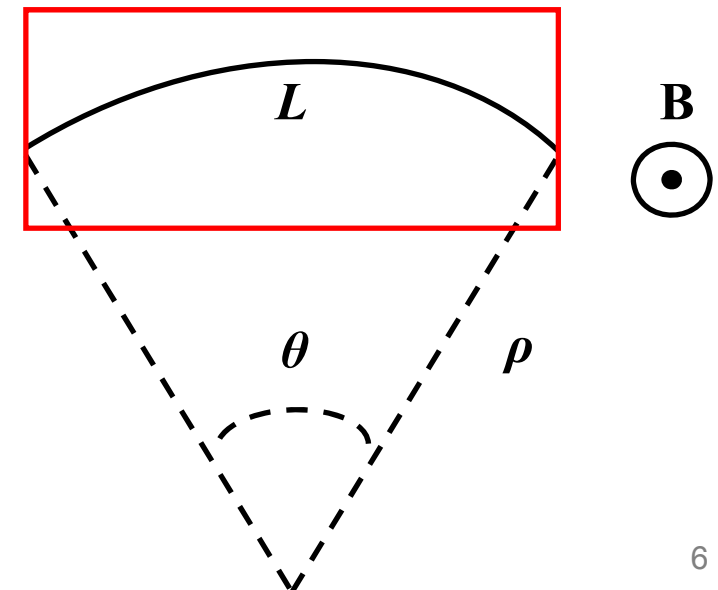
- Γωνία κάμψης $\theta = \frac{2\pi}{N}$

- Ακτίνα κάμψης $\rho = \frac{L}{\theta}$

- Ολοκληρωμένο διπολικό πεδίο

$$BL = \frac{2\pi}{N} \frac{\beta E}{q}$$

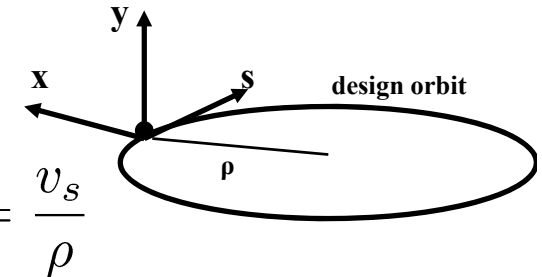
- Επιλέγοντας ένα διπολικό μαγνητικό πεδίο, καθορίζεται και το μήκος του, και αντιστρόφως
- Για υψηλότερα πεδία, μικρότερα και λιγότερα δίπολα μπορούν να χρησιμοποιήθουν
- Η περιφέρεια του δακτυλίου (κόστος) επηρεάζεται από την επιλογή του πεδίου



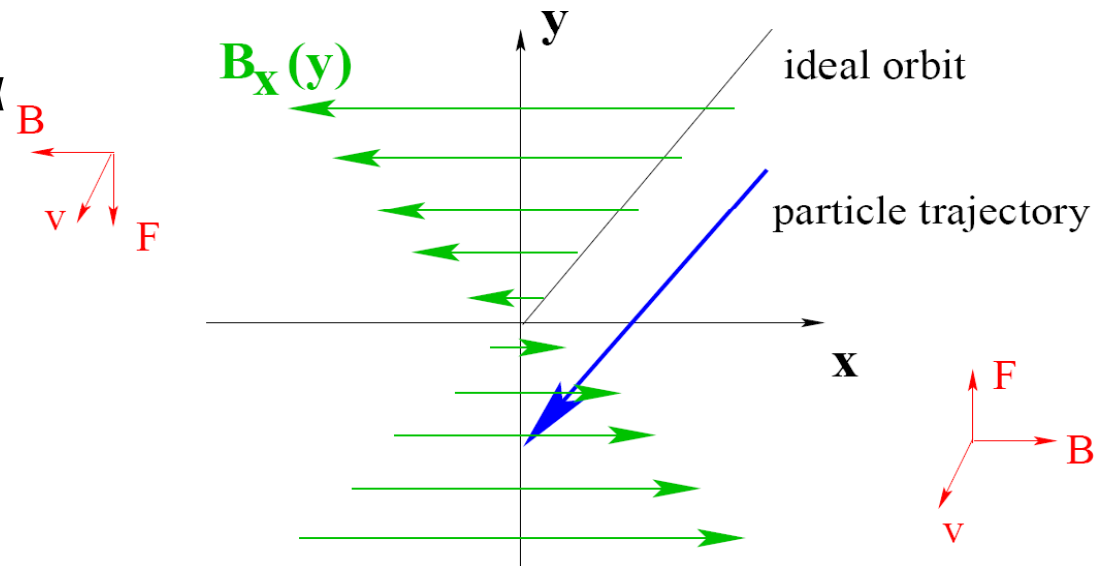
Εστίαση δέσμης



- Έστω σωματίδιο στην ιδεατή τροχιά
- Στο **οριζόντιο επίπεδο**, εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$ με συχνότητα $\omega = \frac{v_s}{\rho}$
- Η οριζόντια επιτάχυνση περιγράφεται από $\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2x}{v_s^2 dt^2} = -\frac{1}{\rho^2}x$
- Υπάρχει **ασθενής εστίαση** στο οριζόντιο επίπεδο
- Στο **κάθετο επίπεδο**, η μόνη δύναμη που ασκείται είναι η βαρύτητα. Τα σωματίδια κινούνται κάθετα ως $\Delta y = \frac{1}{2}a_g \Delta t^2$



- Θέτωντας $a_g = 10\text{m/s}^2$, τα σωματίδια μετατοπίζονται κατά **18mm** (άνοιγμα διπόλου του LHC) σε **60ms** (μερικές 100αδες στροφές του LHC)
↓
χρειάζεται εστίαση



Στοιχεία εστίασης



- Μαγνητικό στοιχείο που εκτρέπει δέσμες με γωνία ανάλογη της απόστασης από το κέντρο του (ισοδύναμο με τον εστιακό φακό στην οπτική) παρέχει εστίαση
- Η γωνία εκτροπής ορίζεται ως $\alpha = -\frac{y}{f}$ για φακό με μήκος εστίας f και μικρή μετατόπιση y .
- Μαγνητικό στοιχείο μήκους l και απόκλισης g αποδίδει πεδίο $B_x = gy$, έτσι ώστε η γωνία εκτροπής να είναι

$$\alpha = -\frac{l}{\rho} = -\frac{q}{\beta E} B_x l = -\frac{q}{\beta E} g l y$$

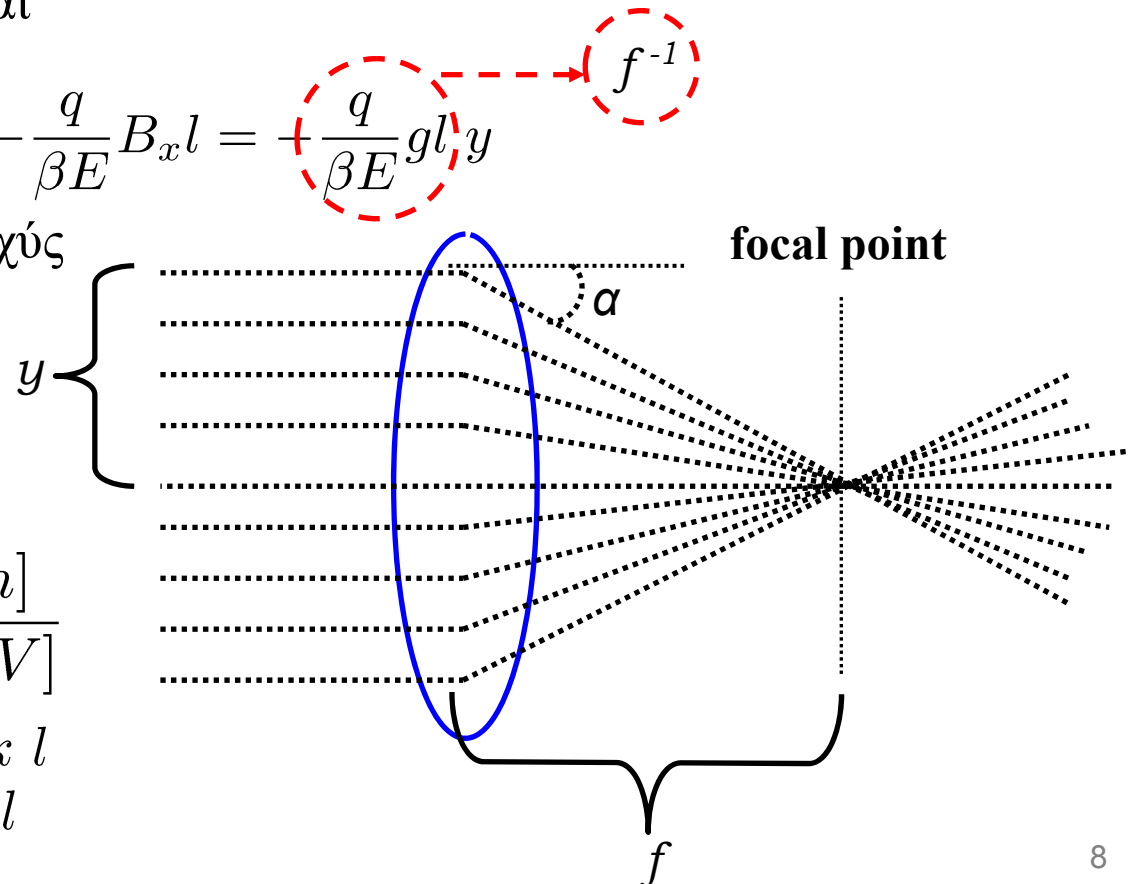
- Η κανονικοποιημένη εστιακή ισχύς ορίζεται ως

$$k = \frac{qg}{\beta E}$$

- Σε πιο πρακτικές μονάδες

$$k[m^{-2}] = 0.2998 \frac{g[T/m]}{\beta E[GeV]}$$

- Το εστιακό μήκος είναι $f^{-1} = k l$ και η γωνία εκτροπής $\alpha = -k y l$



Τετράπολα

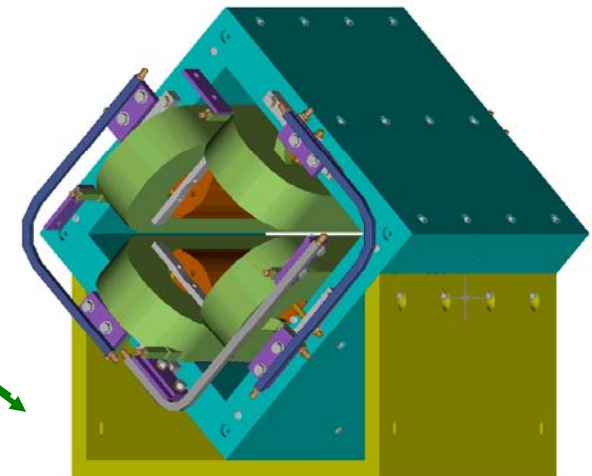
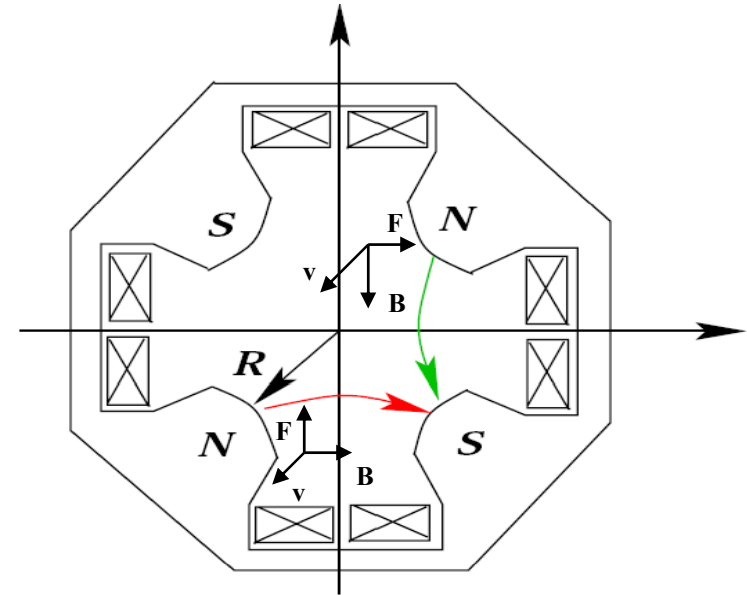


- Τα τετράπολα εστιάζουν στο ένα επίπεδο και αποεστιάζουν στο άλλο
- Το πεδίο είναι $(B_x, B_y) = g(y, x)$
- Η δύναμη γράφεται $(F_x, F_y) = k(y, -x)$
- Χρειάζεται εναλλασσόμενη εστίαση και αποεστίαση ώστε να ελεγχθεί η δέσμη, **εναλλασσόμενη εστιακή απόκλιση**
- Απο την οπτική γνωρίζουμε ότι ο συνδυασμός δ φακών με εστιακές αποστάσεις f_1 και f_2 που σε απόσταση d δίνει ολική εστιακή απόσταση

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

- Εάν $f_1 = -f_2$, υπάρχει ένα καθαρό φαινόμενο εστίασης

$$\frac{1}{f} = \left| \frac{d}{f_1 f_2} \right|$$

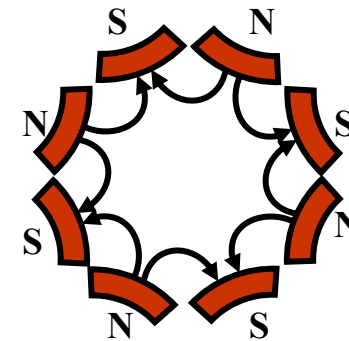
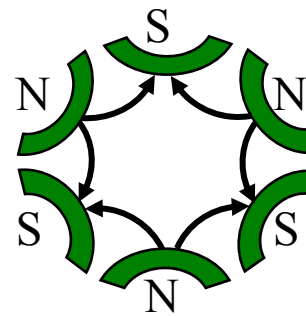
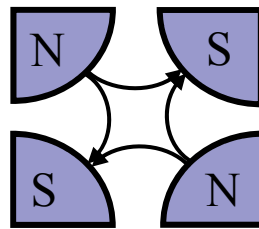
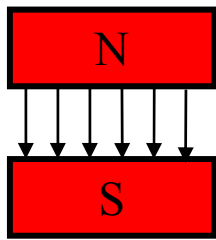


Μαγνητικά «πολύπολα»



- $2n$ -πολα:

δίπολο τετράπολο εξάπολο οκτάπολο ...



n : 1 2 3 4 ...

- Κανονικά: το χάσμα εμφανίζεται στο οριζόντιο επίπεδο
- Λοξά: στροφή γύρω από τον άξονα της δέσμης κατά γωνία $\pi/2n$
- Συμμετρία: στροφή γύρω από τον άξονα της δέσμης κατά γωνία π/n , το πεδίο αντιστρέφεται (αλλάζει πολικότητα)

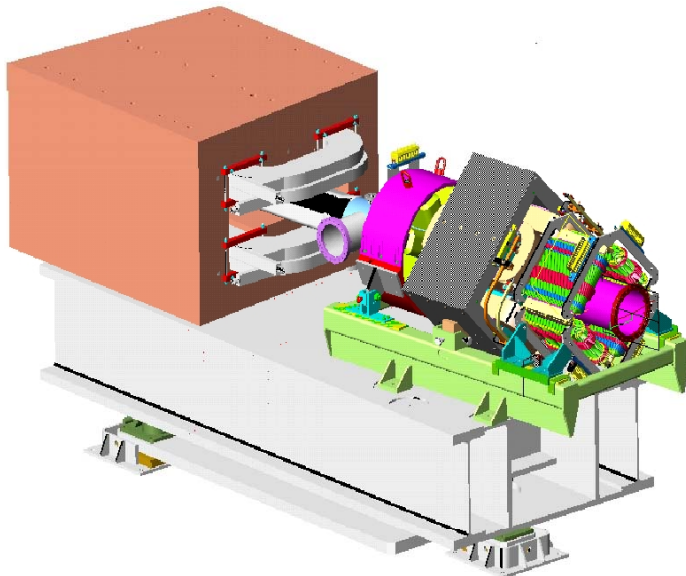
■ Κύρια στοιχεία

- Δίπολο («καμπτικοί» μαγνήτες) → απόκλιση
- Τετράπολο (εστιακοί μαγνήτες) → (απο)εστίαση
- Εξάπολο (χρωματικοί μαγνήτες) → χρωματική διόρθωση
- Κοιλότητα ραδιοσυχνοτήτων → επιτάχυνση

■ Βοηθητικά στοιχεία

- Εκτροπέας (kicker), διαχωριστής (septum) → εισαγωγή, εξαγωγή
- Σωληνοειδές → ελικοειδής τροχιά
- Μαγνητικός ενισχυτής (wiggler) → ακτινοβολία,
κυμματιστές (undulator) → απόσβεση
- Πολύπολλο (οκτάπολο, δεκάπολο, κ.ο.κ.) → διόρθωση

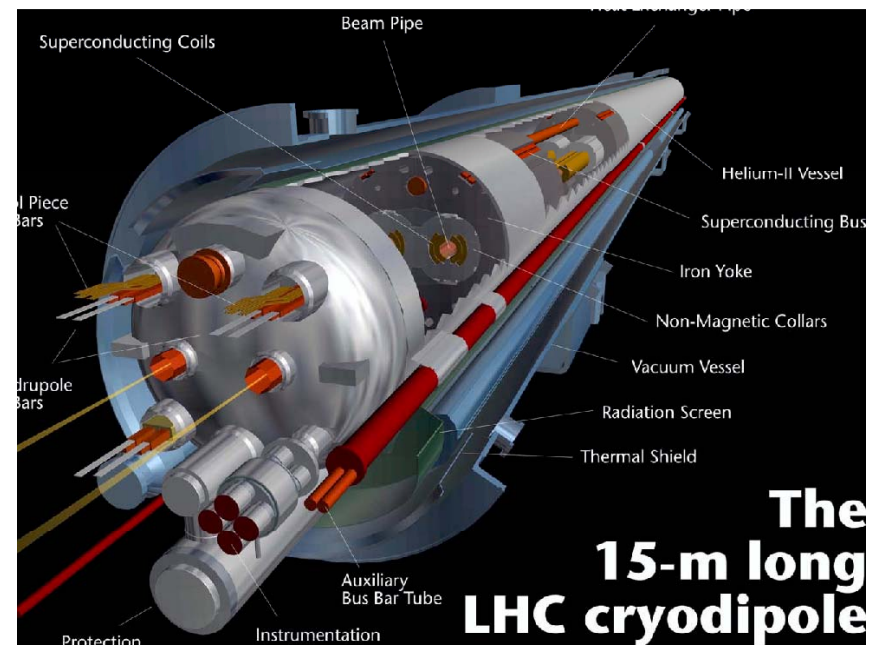
Ηλεκτρομαγνητικά στοιχεία



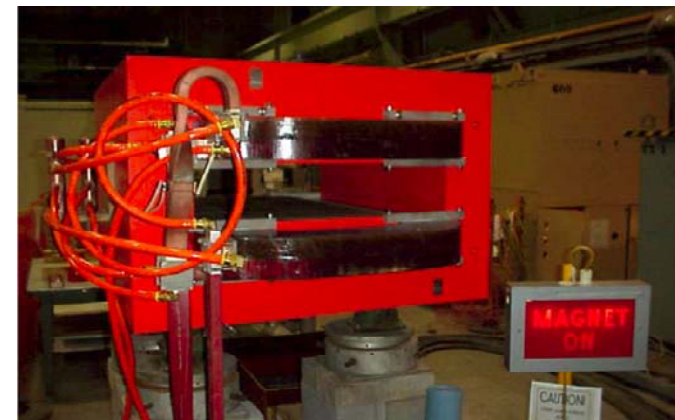
Διάταξη υμικυψέλης του δακτυλίου του SNS



Υπεραγωγίμη κοιλότητα
ραδιοσυχνότητας του SNS



Υπεραγωγίμο δίπολο του LHC



Δίπολο του δακτυλίου του SNS



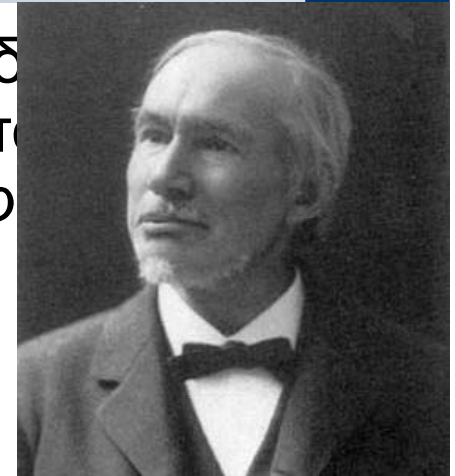
Οπτική των επιταχυντών

Εξισώσεις Hill



- Θεωρώντας σταθερά (δίπολα) και γραμμικά πεδία (τετράπολα), οι εξισώσεις εγκάρσιας κίνησης στο επιταχυντή για **σύγχρονο** σωματίδιο, περιγράφονται από

$$\begin{aligned}x'' + K_x(s) x &= 0 \\ y'' + K_y(s) y &= 0\end{aligned}$$

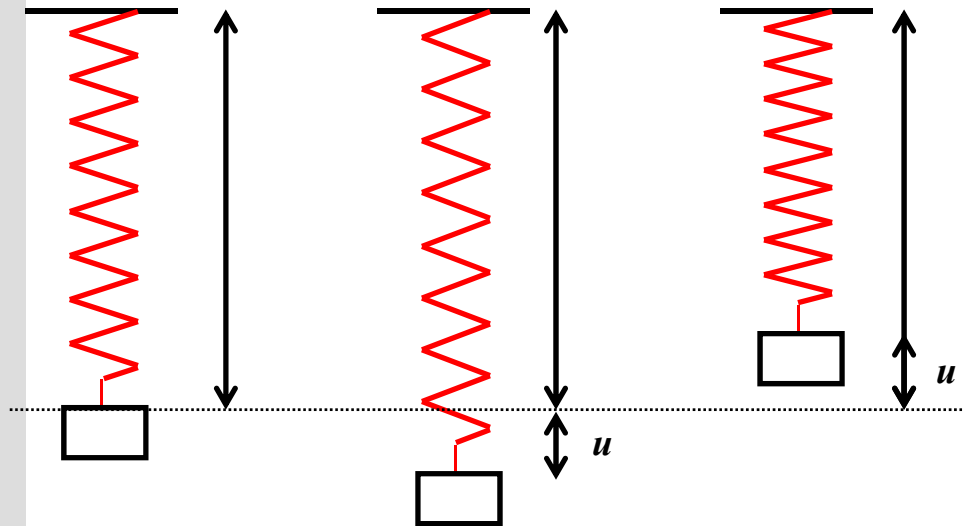


George Hill

όπου $K_x(s) = - \left(k(s) - \frac{1}{\rho(s)^2} \right)$, $K_y(s) = k(s)$

- **Εξισώσεις Hill για την γραμμική εγκάρσια κίνηση**
- Γραμμικές εξισώσεις χρονο-εξαρτημένες
 - $s = c t$ είναι το μήκος τροχιάς αλλά μπορεί να θεωρηθεί ως χρόνος
 - Αρμονικός ταλαντωτής με συχνότητα που εξαρτάται του χρόνου
- Σε δακτύλιο ή γραμμή μεταφοράς με συμμετρίας, οι $K_x(s) \doteq K_x(s + C)$, $K_y(s) = K_y(s + C)$ είναι περιοδικοί

Αρμονικός ταλαντωτής (ελατήριο)



- Θεωρείστε $K(s) = k_0 = \text{σταθερό}$

$$u'' + k_0 u = 0$$

- Εξισώσεις αρμονικού ταλαντωτή με λύση

$$u(s) = C(s) u(0) + S(s) u'(0)$$

$$u'(s) = C'(s) u(0) + S'(s) u'(0)$$

$$C(s) = \cos(\sqrt{k_0} s) , \quad S(s) = \frac{1}{\sqrt{k_0}} \sin(\sqrt{k_0} s) \quad \text{για } k_0 > 0$$

$$C(s) = \cosh(\sqrt{|k_0|} s) , \quad S(s) = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \sinh(\sqrt{|k_0|} s) \quad \text{για } k_0 < 0$$

- Οι λύσεις δύνονται σε μορφή πίνακα

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}$$

- Γενικός πίνακας μεταφοράς από s_0 σε s

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}_s = \mathcal{M}(s|s_0) \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}_{s_0} = \begin{pmatrix} C(s|s_0) & S(s|s_0) \\ C'(s|s_0) & S'(s|s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}_{s_0}$$

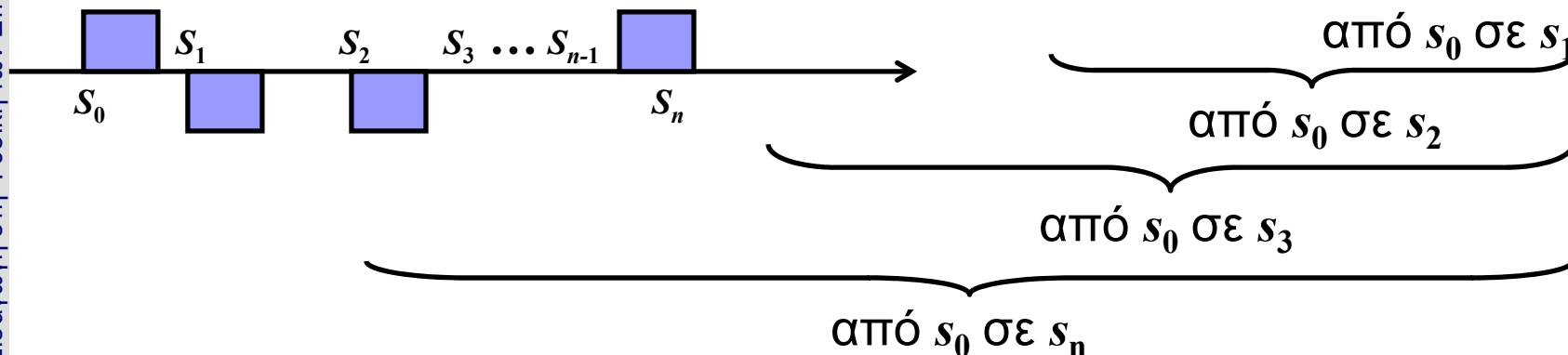
- Σημειώστε ότι $\det(\mathcal{M}(s|s_0)) = C(s|s_0)S'(s|s_0) - S(s|s_0)C'(s|s_0) = 1$
το οποίο ισχύει πάντα για διατηρητικά δυναμικά συστήματα

- Σημειώστε ακόμα ότι $\mathcal{M}(s_0|s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{I}$

- Η λύση για τον επιταχυντή μπορεί να παρασταθεί από ένα γινόμενο

$$\mathcal{M}(s_n|s_0) = \mathcal{M}(s_n|s_{n-1}) \dots \mathcal{M}(s_3|s_2) \cdot \mathcal{M}(s_2|s_1) \cdot \mathcal{M}(s_1|s_0)$$

Εισαγωγή στη Φυσική των Επιταχυντών



Πίνακας μεταφοράς για ευθεία



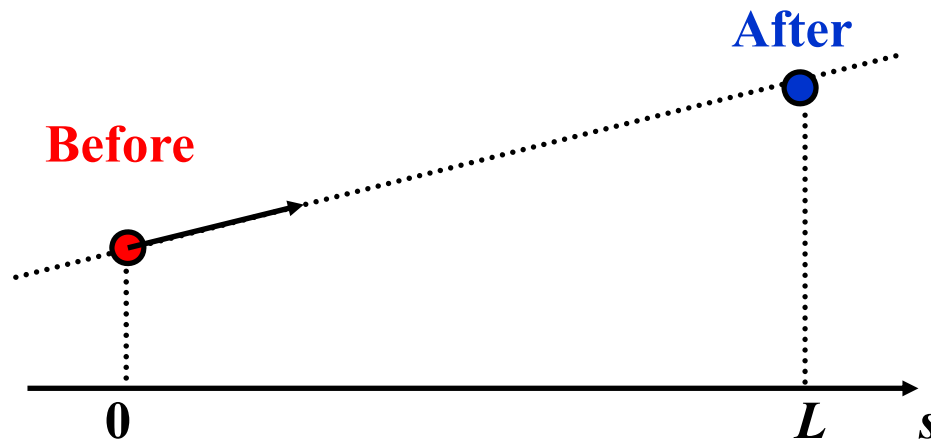
- Θεωρείστε ευθεία (χωρίς μαγνητικά στοιχεία) μήκους $L=s-s_0$

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix}$$

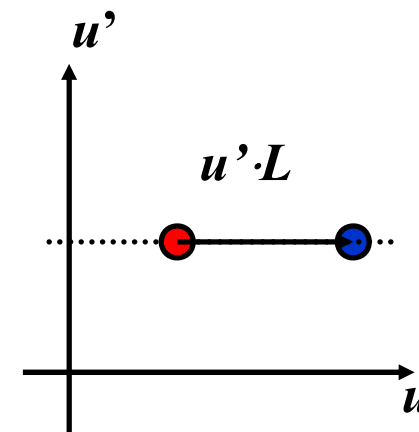
$$\mathcal{M}_{\text{drift}}(s|s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u(s) &= u_0 + \overbrace{(s - s_0)}^L u'_0 = u_0 + L u'_0 \\ u'(s) &= u'_0 \end{aligned}$$

- Η θέση του σωματιδίου αλλάζει αλλά η κλίση παραμένει σταθερή.



Real Space



Phase Space

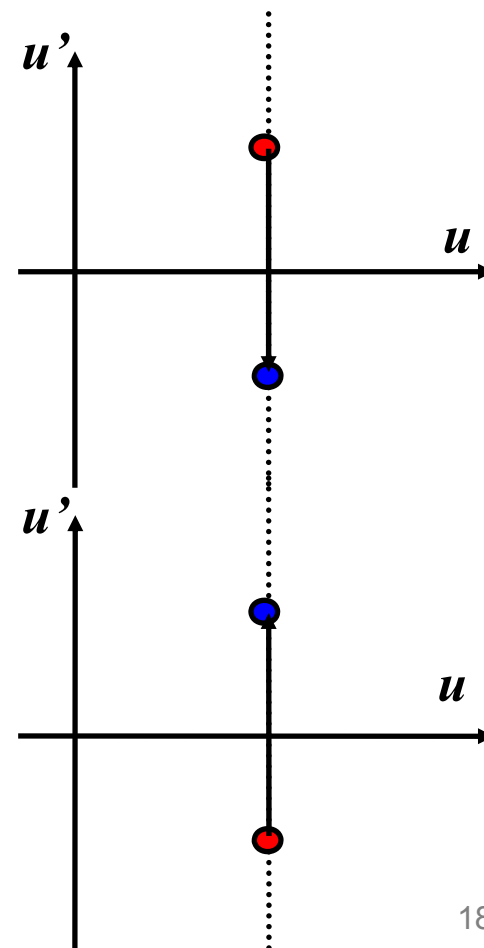
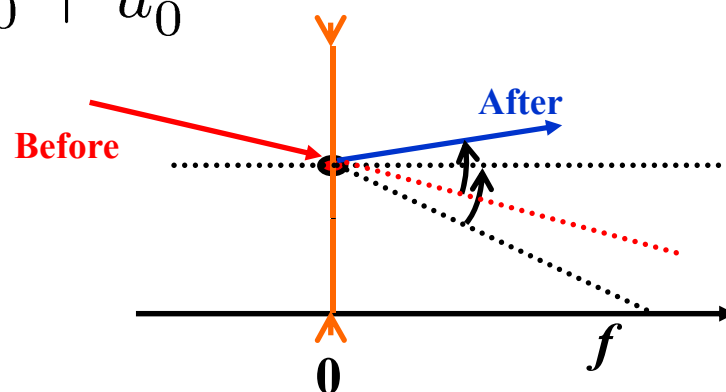
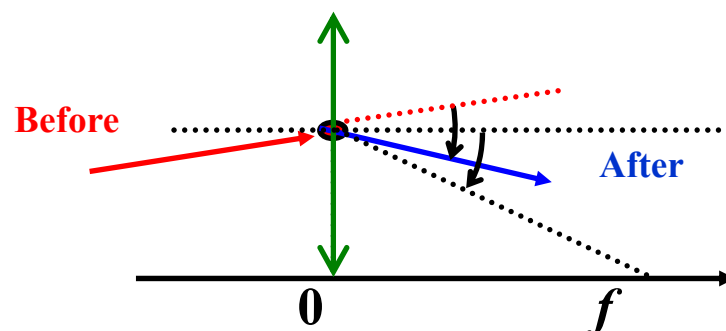
(Από)εστιακός λεπτός φακός

- Θεωρείστε λεπτό φακό με εστιακή απόσταση $\pm f$

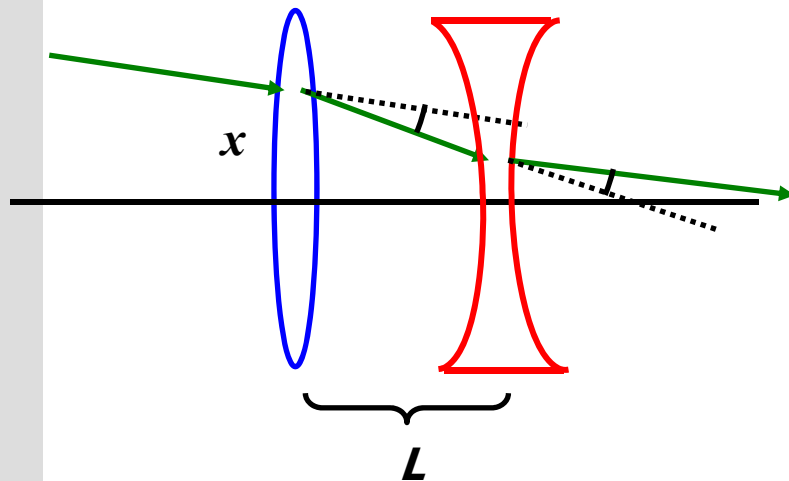
$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\text{lens}}(s|s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

- Η κλίση **μειώνεται** (εστίαση) ή **αυξάνεται** (αποεστίαση) για θετική θέση, που παραμένει σταθερή



Εστιακά ζεύγη



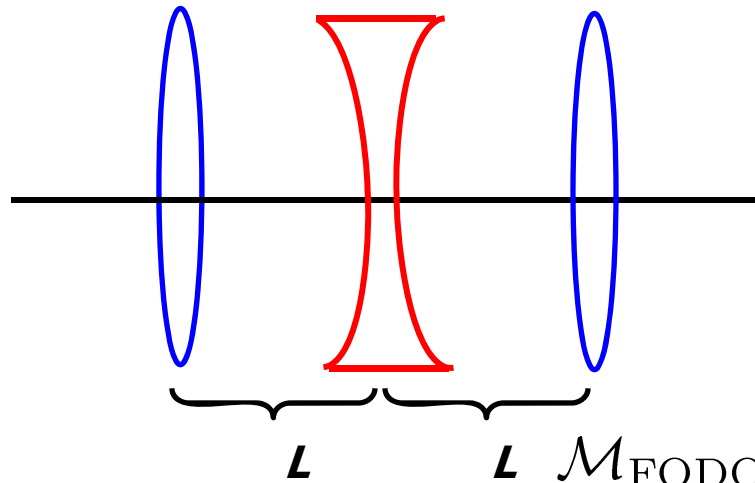
- Θεωρείστε εστιακό ζεύγος, δηλαδή δύο λεπτούς φακούς (τετράπολα) με εστιακές αποστάσεις f_1 και f_2 σε απόσταση L μεταξύ τους.

- Ο πίνακας μεταφοράς γράφεται

$$\mathcal{M}_{\text{doublet}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_1} & L \\ -\frac{1}{f^*} & 1 - \frac{L}{f_2} \end{pmatrix}$$

με την **ολική εστιακή απόσταση** $\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}$

- Θέτοντας $f_1 = -f_2 = f$ $\frac{1}{f^*} = \frac{L}{f^2}$
- **Εστίαση εναλλασσόμενης απόκλισης δίνει εστίαση!**
- Αυτό ισχύει μόνο για λεπτούς φακούς



- Θεωρείστε λεπτό από-εστιακό τετράπολο ανάμεσα σε δύο εστιακά, με αντίθετες εστιακές αποστάσεις $\pm f$.

- Συμμετρικός πίνακας μεταφοράς από το κέντρο του πρώτου ως το

$$\mathcal{M}_{\text{FODO}} = \dot{\mathcal{M}}_{\text{HQF}} \cdot \mathcal{M}_{\text{drift}} \cdot \mathcal{M}_{\text{QD}} \cdot \mathcal{M}_{\text{drift}} \cdot \dot{\mathcal{M}}_{\text{HQF}}$$

χρησιμοποιώντας τους πίνακες μεταφοράς

$$\mathcal{M}_{\text{HQF}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\text{drift}} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\text{QD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

- Ο ολικός πίνακας μεταφοράς γράφεται ως

$$\mathcal{M}_{\text{FODO}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L^2}{2f^2} & 2L(1 + \frac{L}{2f}) \\ -\frac{L}{2f^2}(1 - \frac{L}{2f}) & 1 - \frac{L^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$